

8

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a VIII-a

AG
2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

$$\text{a) } x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0$$

1p

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\sqrt{\mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{y}}) \geq 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0$$

2p

$$(\sqrt{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{y}})(\sqrt{\mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{y}})^2 \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$$

$$\text{b) } 2\sqrt{2} + 1\sqrt{1} \geq 2\sqrt{1} + 1\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}$$

1p

Generalizare pentru $k \in \mathbb{N}^*$

$$(k+1)\sqrt{k+1} + k\sqrt{k} \geq (k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1} \Rightarrow$$

1p

$$\frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{1})\sqrt{\mathbf{k} + \mathbf{1}} + \mathbf{k}\sqrt{\mathbf{k}}} \leq \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{1})\sqrt{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\sqrt{\mathbf{k} + \mathbf{1}}}$$

1p

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Însumând relațiile obținute pentru $k = \overline{1, n}$, obținem concluzia.

1p

Subiectul II – soluție orientativă

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

1p

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} = \sqrt{2a^2}$$

2p

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = \sqrt{2(a-2)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = \sqrt{2}(|a| + |a - 2|)$$

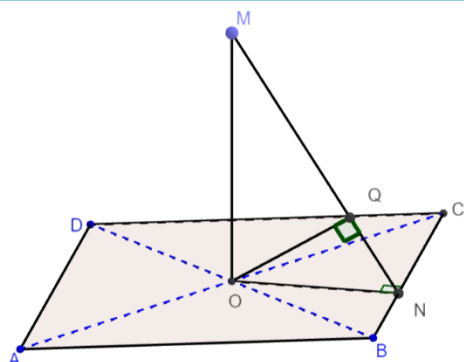
2p

Finalizare $\sqrt{2}(|b-1| + |b-3|) = \sqrt{2}(b-1+3-b) = 2\sqrt{2}, b \in [1, 3]$.

2p

Subiectul III – soluție orientativă

a) Desen corect.



1p

$$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \triangle BCD \text{ echilateral} \Rightarrow CO = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$ON = 3\sqrt{3} \text{ cm}, \text{ unde } ON \perp BC.$$

$$\left. \begin{array}{l} MO \perp (ABC) \\ MO \perp ON, ON \subset (ABC) \\ ON \perp BC, BC \subset (ABC) \\ ON \cap BC = \{N\} \\ M \notin (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3 \perp} MN \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MN$$

$$MN = 9 \text{ cm}$$

$$\text{b) } d(O, (MBC)) = OQ, OQ \perp MN$$

$$\left. \begin{array}{l} OQ \perp MN, MN \subset (MBC), \\ OQ \cap MN = \{Q\} \\ MN \perp BC, BC \subset (MBC), \\ MN \cap BC = \{N\} \\ ON \perp BC \\ O \notin (MBC) \end{array} \right\} \xrightarrow{R_2 T_3 \perp} OQ \perp (MBC) \Rightarrow d(O, (MBC)) = OQ$$

$$\text{Finalizare } OQ = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

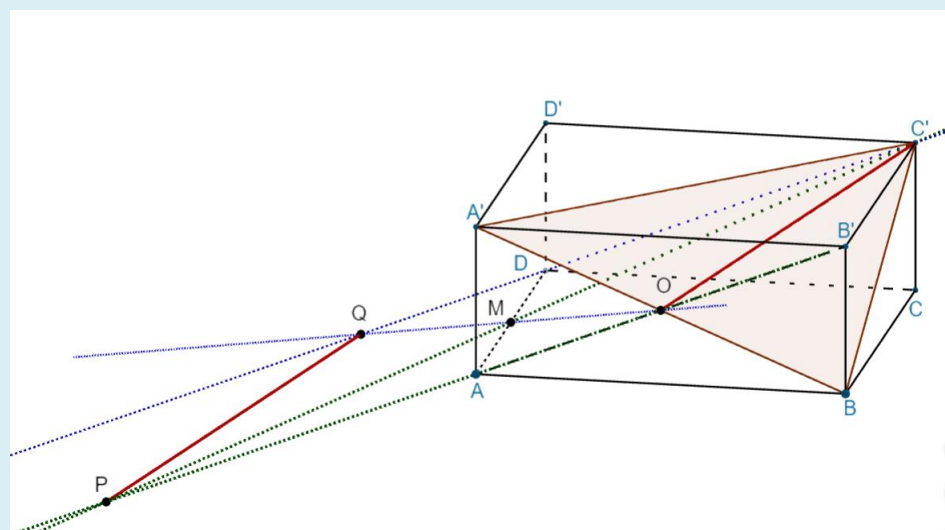
3p

1p

2p

Subiectul IV – soluție orientativă

Desen corect.



1p

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ mijloc } AD \\ AD \parallel B'C' \\ AD = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MA = \frac{B'C'}{2} \\ MA \parallel B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow MA \text{ linie mijlocie } \triangle PB'C'$$

$$\Rightarrow M \text{ mijlocul } C'P$$

$$\triangle MOA \equiv \triangle MQD \Rightarrow MO \equiv MQ$$

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ mijlocul } C'P \\ M \text{ mijlocul } OQ \end{array} \right\} \Rightarrow QC'OP \text{ paralelogram}$$

$$\Rightarrow PQ \parallel OC'$$

$$OC' \subset (A'BC') \Rightarrow PQ \parallel (A'BC')$$

3p

1p

2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător

Varianta 2